

研究论文

DOI: 10.11949/j.issn.0438-1157.20160411

竖直翅片间液桥体积计算模型

庄大伟, 杨艺菲, 胡海涛, 丁国良

(上海交通大学制冷与低温工程研究所, 上海 200240)

摘要: 管翅式换热器在析湿工况下会在翅片间形成大量液桥, 液桥体积会影响换热器中冷凝水的排出。提出一种将液面弯曲线沿液桥三相接触线积分的方法计算竖直翅片间液桥体积, 其中液桥三相接触线采用椭圆方程描述, 液面弯曲线模型基于 Young-Laplace 方程的计算结果拟合得到。通过液桥三相接触线与液面弯曲线观测实验对提出的液桥体积计算模型进行了验证, 结果表明, 95% 的计算结果与实验的误差范围在 $\pm 15\%$ 内, 平均误差为 7.12%。

关键词: 液桥体积; 竖直翅片; 模型; 数值分析; 实验验证

中图分类号: TK 124

文献标志码: A

文章编号: 0438—1157 (2016) 10—4080—06

Model for calculating water bridge volume retained between vertical fins

ZHUANG Dawei, YANG Yifei, HU Haitao, DING Guoliang

(Institute of Refrigeration & Cryogenics Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: When a fin-and-tube heat exchanger worked as dehumidifier, lots of water bridges would form between vertical fins and the water volume of these bridges could affect discharge of water condensate. A model for the calculation of water bridge volume was established by integration of meniscus curve along triple contact line of the water bridge. An ellipse equation was used to simulate the triple contact line while a model of meniscus curve at the water-air interface was obtained from calculation results of the Young-Laplace equation. The model for calculating water bridge volume was validated by experimental study on triple contact lines and meniscus curves. The model predicted water volumes of these bridges 95% times aligned with the experimental data within the deviation limit of $\pm 15\%$, which had a mean deviation of 7.12%.

Key words: water bridge volume; vertical fin; model; numerical analysis; experimental validation

引 言

翅片管式换热器广泛应用于空调系统^[1-3], 而且经常运行在湿工况下^[4-6]。当翅片温度低于湿空气的露点温度时, 湿空气中的水蒸气会冷凝析出, 并在翅片表面形成小液滴^[7-8], 小液滴会随冷凝过程的不断进行进一步生长并互相靠拢, 从而在翅片间形成液桥。竖直翅片间的液桥会阻塞空气流动, 恶化换

热以及增大压降^[9-11]。因此, 研究竖直翅片间的液桥很重要。

液桥的研究包括 3 个方面: 接触线、接触角和体积。现有研究表明竖直翅片间液桥的接触线为椭圆形^[11-12]; 接触角可以通过与方位角有关的三次多项式表达^[12]。液桥的体积决定液桥受到的重力, 目前已有将液桥假设为双曲线体的体积模型^[13]。但观察发现竖直翅片间液桥不能简单地采用双曲线体计

2016-04-01 收到初稿, 2016-06-03 收到修改稿。

联系人: 丁国良。第一作者: 庄大伟 (1987—), 男, 博士后。

基金项目: 国家自然科学基金项目 (51576122); 国家自然科学基金创新研究群体科学基金项目 (51521004); 上海市优秀学术带头人计划项目 (16XD1401500)。

Received date: 2016-04-01.

Corresponding author: DING Guoliang, glding@sjtu.edu.cn

Foundation item: supported by the National Natural Science Foundation of China (51576122), the Foundation for Innovative Research Groups of the National Natural Science Foundation of China (51521004) and the Program of Shanghai Academic Research Leader (16XD1401500).

算液桥的体积, 因此需要建立一个能够计算竖直翅片间液桥体积的模型, 用于评价液桥的排水特性。

液桥体积模型可以通过对液固接触面和气液接触面的积分求得, 其中液固接触面是由接触线包围而成, 气液接触面是由弯曲液面沿接触线旋转而成, 所以建立液桥体积模型的关键是弯曲液面曲线和接触线方程。弯曲液面和椭圆接触面会受到表面张力和重力的影响, 导致液桥接触角在不同方位下的不同, 因此在计算液桥体积时需要考虑重力和表面张力对液桥形状的影响。目前液桥接触线方程已有研究成果^[12-16], 包括水平液桥的圆形接触线^[13-14]和竖直的椭圆形接触线^[15-16]。对于本工作研究的竖直液桥, 接触线为椭圆形, 椭圆方程与液桥尺寸、翅片间距和表面特性有关。目前接触角的研究是针对水平板间液桥的^[17-19], 当液桥形成在竖直平板间时, 在重力的作用下液桥将会发生形变, 其接触角会随方位角变化而变化, 因此不能用水平液桥接触角模型计算竖直液桥的接触角。

本工作考虑到在重力和表面张力作用下液桥的接触角随方位角的变化, 建立了能够计算竖直翅片间液桥体积的模型。

1 数学模型

1.1 建模对象

竖直翅片间形成的液桥如图1所示。液桥由空气-水交界面和水-翅片交界面两部分包裹而成。通过已知的翅片表面润湿性、翅片间距和液桥尺寸可以得到空气-水弯曲线和水-翅片接触线, 然后分别得到空气-水交界面和水-翅片交界面, 最后通过积分的方法求得液桥的体积。

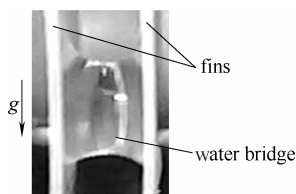


图1 竖直翅片间液桥示意图

Fig. 1 Schematic diagram of water bridge between vertical fins

1.2 水-翅片交界面的接触线方程

水-翅片交界面的形状如图2所示。其形状可以表示为椭圆方程

$$\frac{x^2}{L^2} + \frac{y^2}{(L/\beta)^2} = 1 \quad (1)$$

式中, L 表示接触线椭圆的半长轴, 可以反映液桥的尺寸; β 表示接触线椭圆的长短比^[12], 可以通过式(2)求得

$$\beta = 1 + 0.71Bo \quad (2)$$

$$Bo = \frac{\rho g L d}{\sigma} \quad (3)$$

式中, Bo 表示 Bond 数, g 表示重力加速度, ρ 表示水的密度, d 表示翅片间距, σ 表示水的表面张力系数。

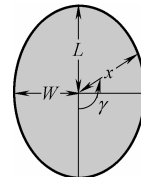


图2 竖直翅片间液桥水-翅片交界面

Fig. 2 Interface between water bridge and vertical fin

1.3 空气-水交界面的弯曲线方程

竖直平板间的弯曲线轮廓如图3所示。弯曲线方程可以由 Young-Laplace 基本方程[式(4)]推导得到。方程左项是考虑重力作用下弯曲线液面的内外压差, 可由式(5)求解得到; 方程右项可以由曲率计算公式[式(6)]求解得到^[20]。将式(5)和式(6)代入式(4)可以得到液桥弯曲线的曲率公式[式(7)]。

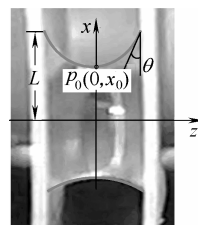


图3 液桥弯曲线轮廓

Fig. 3 Contour of meniscus curve of water bridge

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (4)$$

$$\Delta p = \Delta \rho g (x + L) \quad (5)$$

$$\sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\sigma z_{xx}}{(1 + z_x^2)^{3/2}} \quad (6)$$

$$\sigma \frac{z_{xx}}{(1 + z_x^2)^{3/2}} = \Delta \rho g (x + L) \quad (7)$$

式中, Δp 是交界面压差, R_1 和 R_2 是主曲率半径, $\Delta \rho$ 是水和湿空气密度差, g 是重力加速度, x 是弯曲线上任意一点的纵坐标, σ 是表面张力系数。

对式(7)左右两侧同时进行积分, 如式(8)所示, 即可以得到弯曲线的斜率公式[式(9)], 式(9)中的系

数 A 可以通过式(10)计算。

$$\int \frac{1}{(1+z_x^2)^{3/2}} dz_x = \int [\Delta\rho g(x+L)] dx \quad (8)$$

$$z_x = -\frac{(\Delta\rho g/\sigma)x^2/2 + (\Delta\rho gL/\sigma)x + A}{\sqrt{1 - [(\Delta\rho g/\sigma)x^2/2 + (\Delta\rho gL/\sigma)x + A]^2}} \quad (9)$$

$$A = \sin\theta - 3\Delta\rho gL^2/2\sigma \quad (10)$$

式(9)是弯曲线的斜率方程, 但方程并没有封闭解析解。因此, 为了更方便地求解, 本工作引入四次方程[式(11)]拟合弯曲线, 并通过式(12)和式(13)所示的边界条件确定四次方程的待定系数。

$$x(z) = c_1 z^4 + c_2 z^2 + c_3 \quad (11)$$

$$\begin{cases} x(d/2) = -L \\ x(0) = x_0 \\ \left. \frac{dx}{dz} \right|_{z=d/2} = -\cot\theta \end{cases} \quad (12)$$

$$x_0 = -L + \sqrt{L^2 - 2\sigma(A-1)/\Delta\rho g} \quad (13)$$

式中, c_1 、 c_2 和 c_3 是待定系数, x_0 表示弯曲线最低点 p_0 的纵坐标。

因此, 最终的弯曲线形状的四次方程可以表示如下

$$x(z) = \left[\frac{16\sqrt{L^2 - 2\sigma(A-1)/\Delta\rho g} - 4d\cot\theta}{d^4} \right] z^4 + \left[-\frac{8}{d^2} \left(\sqrt{L^2 - 2\sigma(A-1)/\Delta\rho g} \right) + \frac{\cot\theta}{d} \right] z^2 + \left[-L + \sqrt{L^2 - 2\sigma(A-1)/\Delta\rho g} \right] \quad (14)$$

图 4 是解析方程与四次拟合方程关于弯曲线在 x 轴右半部分的对比, 由图可知四次曲线与解析曲

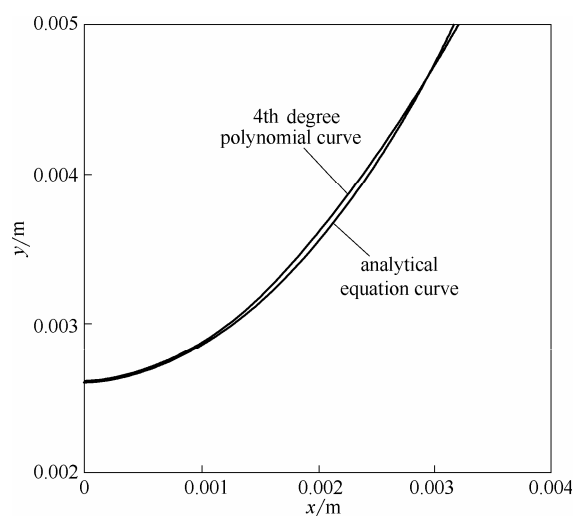


图 4 解析方程与四次拟合方程关于弯曲线的对比

Fig. 4 Comparison of meniscus curve between analytical equation and 4th degree polynomial

线吻合较好, 因此可以用四次曲线表示液桥的弯曲线的形状, 从而为进一步积分求解液桥体积提供方便。

1.4 液桥体积模型

式(14)中的参数 L 和 θ 是与方位角 γ 有关的变量, 具体关系如下所示^[12]

$$L(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\gamma}{L_0^2} + \frac{\sin^2\gamma}{(L_0/\beta)^2}}} \quad (15)$$

$$\theta(\gamma) = 2 \frac{(-2.53Bo^2 + 2.01Bo + 0.1)\theta_A}{\pi^3} \gamma^3 - 3 \frac{(-2.53Bo^2 + 2.01Bo + 0.1)\theta_A}{\pi^2} \gamma^2 + \theta_A \quad (16)$$

式中, $L(\gamma)$ 表示随方位角 γ 变化的椭圆接触线弦长; L_0 表示方位角为 0 时的椭圆弦长, 即椭圆长半轴; $\theta(\gamma)$ 表示随方位角 γ 变化的液桥接触角。

液桥体积可以通过积分求得。对于 z 的积分从 $-d/2$ 到 $d/2$, 对于 γ 的积分从 0 到 2π , 如图 5 所示。液桥的体积可以用积分的形式表达为

$$dV = \frac{1}{2} [x(z, \gamma)]^2 d\gamma dz \quad (17)$$

$$V = \int_{-d/2}^{d/2} \int_0^{2\pi} \left\{ \left[\frac{16x_0 + 16\zeta(\gamma) - 4d\cot\theta(\gamma)}{d^4} \right] x^4 + \left[-\frac{8}{d^2} (\zeta(\gamma) + x_0) + \frac{\cot\theta(\gamma)}{d} \right] x^2 + x_0 \right\} d\gamma dz \quad (18)$$

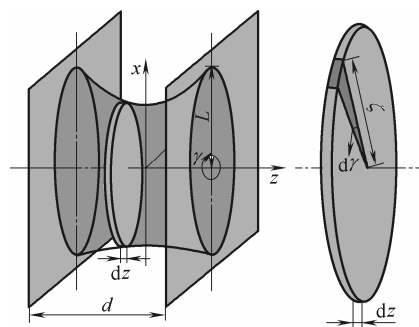


图 5 液桥体积的积分单元体

Fig. 5 Integral section for volume of water bridge

2 模型验证

2.1 实验目的

通过可视化实验观测液桥轮廓, 并对比实验中液桥体积与模型计算得到的液桥体积结果, 进而达到验证模型的目的。

2.2 实验原理与装置

本实验的工作原理是在竖直平板间滴注液体形成液桥, 通过 CCD 相机拍摄液桥轮廓, 并采用

图像处理技术进行分析。

实验需要测量的量包括平板的前进接触角 θ_A 、液桥长度 L 和平板间距 d 。通过这 3 个实验量作为输入量代入计算模型中计算液桥体积, 并对液桥体积的模型计算结果与实验滴注的液桥体积值 V , 从而得到模型预测值与实验值的误差。

液桥体积的实验验证装置包括液体注射系统、翅片样件系统、拍摄系统和旋转系统, 如图 6 所示。

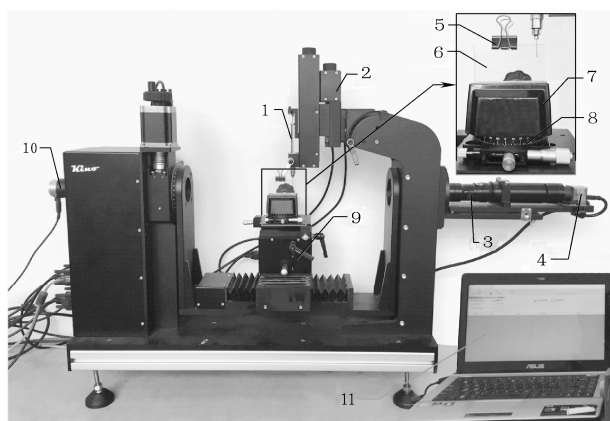


图 6 实验装置

Fig. 6 Schematic diagram of experimental apparatus

1—auto-syringe; 2—elevator; 3—lens; 4—CCD camera; 5—clamp; 6—transparent sample; 7—fixed system; 8—rotation platform; 9—x-y-z movable platform; 10—LED light; 11—computer

2.3 实验步骤

本实验包括两个步骤。

(1) 在竖直翅片间注射蒸馏水, 形成液桥。

竖直翅片由两个平板组成, 通过调节垫片厚度可以调节翅片间距。翅片样件通过螺丝与接触角测量仪测试平台进行固定。通过注射器向翅片间注射蒸馏水, 从而形成液桥。

(2) 拍摄液桥轮廓, 并获得液桥体积数据。

通过旋转系统可以使拍摄角度达到 $0^\circ \sim 90^\circ$ 。CCD 照相机可以在 0° 时拍摄液桥的正视图, 在 90° 时拍摄液桥的侧视图, 从而获得液桥的基本参数。通过接触角测量仪自带的液体注射系统可以控制滴入液桥的体积, 从而与模型预测值进行对比。

2.4 验证结果与讨论

图 7 显示了模型预测与实验数据关于液桥体积的误差, 其中符号 $\times$ 表示无重力计算模型与实验的误差, 符号 $\circ$ 表示有重力计算模型与实验的误差。无重力计算模型可以在 $\pm 40\%$ 的误差范围内描述 100% 的点, 平均误差为 20.15%; 有重力计算模型可以在 $\pm 15\%$ 的误差范围内描述 95% 的点, 平均误

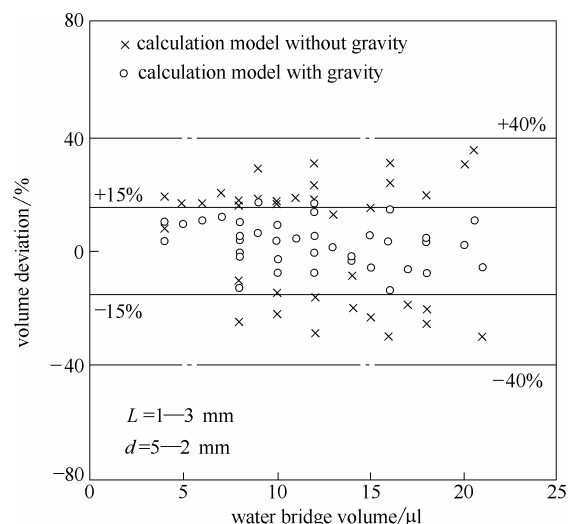


图 7 模型预测与实验数据关于液桥体积的误差

Fig. 7 Deviation of predicted water bridge volumes from experimental measurements

差为 7.12%。

对于考虑了重力作用的计算模型, 预测结果与实验结果的误差是由于对固体表面的前进接触角和后退接触角描述的不准确引起的。在实际的实验样件中, 固体平板是表面特性不均匀的, 在平板上的各点其前进接触角和后退接触角不一致, 通过实验对平板上、下、左、右、中 5 个不同位置点进行测量, 取平均值作为实验的测量值, 见表 1。在模型预测中, 固体表面特性是均匀的, 各点的前进接触角和后退接触角一致, 直接采用实验得到的平均值作为输入参数。因此, 模型预测的结果与实验结果存在误差。

表 1 平板不同位置点的前进接触角和后退接触角

Table 1 Advancing and receding contact angles of different test points

Item	Test point					Average value
	1	2	3	4	5	
$\theta_A/(^\circ)$	77.5	78.4	77.9	78.1	77.6	77.9
$\theta_R/(^\circ)$	56.4	56.2	55.8	56.0	55.7	56.0

竖直翅片间液桥的最小接触角会在前进接触角和后退接触角之间变化。在工程计算中, 为了简化液桥体积的计算过程, 最小接触角通常被认为近似等于后退接触角。这种近似很可能会对液桥体积的计算造成较大的误差, 因此需要了解液桥最小接触角的取值对液桥体积计算的影响。

图 8 反映了最小接触角取值对液桥体积计算结果的影响。由图可知, 液桥的最小接触角会对液桥

体积的计算结果造成很大的影响。采用 $\theta_{\min} = \theta_R$ 的近似计算液桥体积会造成最大 17.3% 的计算误差。因此, 在计算液桥体积时, 不能用后退接触角直接代替液桥的最小接触角进行计算, 而应该采用本文使用的式(16)进行求解。

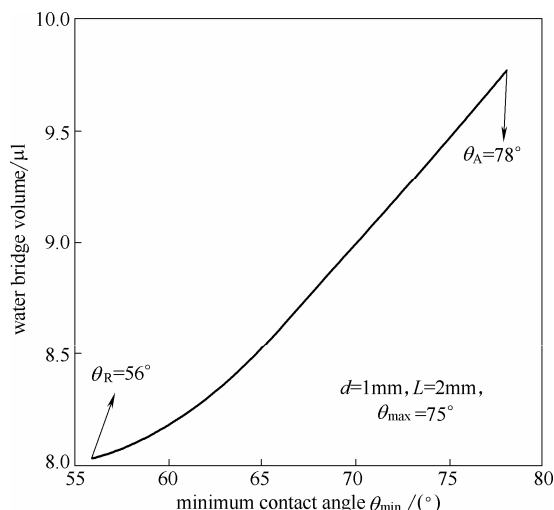


图 8 最小接触角取值对液桥体积的影响

Fig. 8 Effect of minimum contact angle on water bridge volume

3 结 论

(1) 竖直翅片间液桥体积可以通过对弯曲线沿着接触线进行积分求得。

(2) 水-翅片交界面的接触线可以用与长短比有关的椭圆方程表示; 空气-水交界面的弯曲线可以由四次方程对弯曲线方程进行描述。

(3) 液桥形状的模型预测结果和可视化图像吻合较好; 液桥体积的模型计算结果可以在 $\pm 15\%$ 的误差范围内描述 95% 的点, 平均误差为 7.12%。

(4) 液桥体积的计算不能将后退接触角近似等于最小接触角, 这种近似会造成最大 17.3% 的计算误差。

符 号 说 明

Bo —— Bond 数

c —— 待定系数

d —— 平板间距, mm

g —— 重力加速度, $9.81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

k —— 待定系数

L —— 长轴长度, mm

p —— 压力, Pa

R —— 主曲率半径

V —— 体积, μl

β —— 伸长比

γ —— 方位角, ($^\circ$)

θ —— 接触角, ($^\circ$)

ρ —— 密度, $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

σ —— 表面张力, $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$

下角标

A —— 前进

R —— 后退

References

- [1] MA X K, DING G L, ZHANG Y M, *et al.* Airside heat transfer and friction characteristics for enhanced fin-and-tube heat exchanger with hydrophilic coating under wet conditions[J]. International Journal of Refrigeration, 2007, **30**(7): 1153-1167.
- [2] WANG C C, LIN Y T, LEE C J. An airside correlation for plain fin-and-tube heat exchangers in wet conditions[J]. International Journal of Heat and Mass Transfer, 2000, **43**(10): 1869-1872.
- [3] 马有福, 袁益超, 陈昱, 等. 翅片螺距对锯齿螺旋翅片换热管特性的影响[J]. 化工学报, 2011, **62**(9): 2484-2489.
- MA Y F, YUAN Y C, CHEN Y, *et al.* Effects of fin pitch on heat transfer and flow resistance of serrated spiral-finned-tube banks[J]. CIESC Journal, 2011, **62**(9): 2484-2489.
- [4] WANG Q, HAN X H, SOMMERS A, *et al.* A review on application of carbonaceous materials and carbon matrix composites for heat exchangers and heat sinks[J]. International Journal of Refrigeration, 2012, **35**(1): 7-26.
- [5] 闵敬春, 彭晓峰, 王晓东. 竖壁上液滴的脱落直径[J]. 应用基础与工程科学学报, 2002, **10**(1): 57-62.
- MIN J C, PENG X F, WANG X D. Departure diameter of a drop on a vertical plate[J]. Journal of Basic Science and Engineering, 2002, **10**(1): 57-62.
- [6] 杨艺菲, 庄大伟, 胡海涛, 等. 湿工况下平翅片平面凝水形成及运动过程的数值模拟与实验验证[J]. 化工学报, 2014, **65**(S2): 140-147.
- YANG Y F, ZHUANG D W, HU H T, *et al.* Numerical simulation and experimental validation of water condensing and moving on plain-fin surface under dehumidifying conditions[J]. CIESC Journal, 2014, **65**(S2): 140-147.
- [7] LIU Z L, HUANG L Y, GOU Y J, *et al.* Experimental investigations of frost release by hydrophilic surfaces[J]. Frontiers of Energy and Power Engineering in China, 2010, **4**(4): 475-487.
- [8] ZHUANG D W, HU H T, DING G L, *et al.* Numerical model for liquid droplet motion on vertical plain-fin surface[J]. HVAC and R Research, 2014, **20**(3): 332-343.
- [9] KORTE C, JACOBI A M. Condensate retention effects on the performance of plain-fin-and-tube heat exchangers: retention data and modeling[J]. Journal of Heat Transfer, 2001, **123**(5): 926-936.
- [10] WANG C C, LEE W S, SHEU W J, *et al.* Investigation of the airside performance of the slit fin-and-tube heat exchangers[J]. International Journal of Refrigeration, 1999, **22**(8): 595-603.
- [11] QI Z G. Water retention and drainage on air side of heat exchangers—a review[J]. Renewable and Sustainable Energy Reviews, 2013, **28**: 1-10.
- [12] YANG Y F, ZHUANG D W, HU H T, *et al.* Observation and

- description of the shape of water bridge retaining between vertical plane surfaces[J]. International Journal of Refrigeration, 2016, **64**:20-31.
- [13] HARRIS, J W, STOCKER H. Handbook of Mathematics and Computational Science[M]. New York: Springer-Verlag, 1998.
- [14] CHEN Y C, ZHAO Y Z, GAO H L, *et al.* Liquid bridge force between two unequal-sized spheres or a sphere and a plane[J]. Particuology, 2011, **9**(4): 374-380.
- [15] AKBARI A, HILL R J, VAN DE VEN T G M. Liquid-bridge breakup in contact-drop dispensing: liquid-bridge stability with a free contact line[J]. Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics, 2015, **92**(2): 022404.
- [16] MESEGUER J, SLOBOZHANIN L A, PERALES J M. A review on the stability of liquid bridges[J]. Advances in Space Research, 1995, **16**(7): 5-14.
- [17] VOGEL T I. Stability of a liquid drop trapped between two parallel planes II [J]. SIAM Journal on Applied Mathematics, 1989, **49**: 1009-1028.
- [18] PETKOV P V, RADOEV B P. Statics and dynamics of capillary bridges[J]. Colloid Surface A, 2014, **460**: 18-27.
- [19] CHEN H, TANG T, AMIRFAZLI A. Modeling liquid bridge between surfaces with contact angle hysteresis[J]. Langmuir, 2013, **29**(10): 3310-3319.
- [20] BATEMAN H. Partial Differential Equations of Mathematical Physics[M]. UK: Cambridge University Press, 1959: 170.